Chapitre PRODUIT SCALAIRE

1) Produit scalaire de deux vecteurs.

a) Définition :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs dont on trace deux représentants de même origine $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.

On appelle **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre réel noté $\vec{u}.\vec{v}$ défini par :

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}$$

Si l'un des vecteurs est nul, alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

b) **Remarques** :

- Le produit scalaire de deux vecteurs est donc un réel qui peut être positif ou négatif.
- Comme le cosinus d'un angle orienté de vecteurs est égal au cosinus de l'angle que forment les deux demi-droites, on peut remplacer $\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.par $\cos(\widehat{BAC})$.
- Si les vecteurs sont égaux, alors on écrit $\vec{u}.\vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$, c'est le carré scalaire du vecteur $\vec{u}$.

c) Orthogonalité

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul ssi l'un des deux vecteurs est nul, ou si leurs directions sont perpendiculaires.
Dans les deux cas on dit qu'ils sont orthogonaux.

2) Produit scalaire et projection.

a) Produit scalaire et projection

Si le point H est le projeté orthogonal du point C sur (AB), on dit que le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est le projeté orthogonal du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sur la droite (AB).

b) Définition projection.

Si $\overrightarrow{AH}$ est le projeté de $\overrightarrow{AC}$ sur (AB), alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$ c'est à dire :

$$\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \begin{cases} AB \times AH \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de même sens} \\ -AB \times AH \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de sens contraires} \end{cases}}$$

3) Produit scalaire et repère du plan

a) **propriété 1** :

Dans un repère orthonormal, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées $(x\,;y)$ et $(x'\,;y')$ alors **:**

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'}$$

b) **Propriété 2** :

Le carré scalaire d'un vecteur $\vec{u}$,de coordonnées$(x\,;y)$ dans un repère orthonormal, est donné par $\vec{u}^2 = x^2 + y^2$, donc $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

4) Produit scalaire et norme

a) **Définition produit scalaire et normes.**

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant deux vecteurs du plan on a :

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2).}$$

b) **Remarque :** On a également l'égalité : $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$

5) Propriétés du Produit scalaire

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et le réel k on a :

i) $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

ii) $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

iii) $\vec{u}.(k\vec{v}) = k(\vec{u}.\vec{v})$