Chapitre 4 Application de la Dérivation

1) Dérivation et variation

Théorème 1

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et f' sa dérivée. On a les trois propriétés suivantes :

i) Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in$ I, alors la fonction f est strictement croissante sur I.
ii) Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in$ I, alors la fonction f est strictement décroissante sur I.
iii) Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in$ I, alors la fonction f est constante sur I.

2) Dérivation et Extremums

Théorème 2

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle [a ;b] de $\mathbb{R}$, f' sa dérivée et $c \in$] a ;b [

- Si $f(c)$ est un extremum pour f sur [a ;b] alors $f'(c) = 0$.
- Réciproquement si $f'(c) = 0$ et si f' change de signe en c alors $f(c)$ est un extremum pour f sur [a ;b].

Remarque

Dans la réciproque, il faut la condition supplémentaire f' change de signe, le contre-exemple classique étant la fonction définie par $f(x) = x^3$ sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée s'annule en 0 mais $f(0)$ n'est pas un extremum pour f sur $\mathbb{R}$.

3) Dérivation et équations

Théorème 3

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle [a ;b] de $\mathbb{R}$, f' sa dérivée.
On suppose que f' est de signe constant sur [a ;b] et que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés.
Alors f est strictement monotone sur [a ;b] et il existe un unique réel $\alpha \in$ [a ;b] tel que $f(\alpha) = 0$

4) Exemple d'étude

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x^3 + 2x^2 + 1$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme et $g'(x) = -3x^2 + 4x = x(4 - 3x)$
$g'(x) = 0$ ssi $x = 0$ ou $x = \frac{4}{3}$, on en déduit le tableau de variations d'après le signe d'un trinôme car $a = -3$ est négatif .

tableau de variations

x	$+\infty$		0		$\frac{4}{3}$		$-\infty$
Signe de g'		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de g	↘		1	↗	$\frac{49}{27}$	↘	

Résolution de l'équation $g(x) = 0$ sur [2 ;3]

Sur l'intervalle $[2\,;3] \subset \left]\frac{4}{3}\,;+\infty\right[$ g' est de signe constant négatif , donc g est strictement décroissante sur cet intervalle, de plus $g(2)=1$ et $g(3) = -8$ donc $g(2)$ et $g(3)$ sont de signes opposés, donc il existe un unique $\alpha \in [2\,;3]$ tel que $g(\alpha) = 0$. A la calculatrice on obtient $\alpha \in\ ]2{,}20\,;2{,}21[$