

Chapitre 2 Barycentre dans le plan

1) Barycentre de deux points

a) *Définition*

Soient A et B deux points du plan et a et b deux réels vérifiant $a + b \neq 0$, alors il existe un unique point G du plan qui vérifie :

$$\boxed{a \overrightarrow{GA} + b \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}}$$

Ce point est appelé barycentre des points A et B affectés des coefficients a et b, on note $G = \text{barycentre} \{(A ; a) ; (B ; b)\}$.

b) *Propriété multiplication par un scalaire*

On ne change pas le barycentre de deux points si on multiplie les coefficients de chaque point par un même nombre non nul.

c) *Propriété fondamentale*

Si G est le barycentre de $\{(A ; a) ; (B ; b)\}$ avec $a + b \neq 0$, alors pour tout point M du plan on a :

$$\boxed{a \overrightarrow{MA} + b \overrightarrow{MB} = (a + b) \overrightarrow{MG}}$$

d) *Position*

Si G est le barycentre de $\{(A ; a) ; (B ; b)\}$ avec $a + b \neq 0$, on a :

$$\boxed{\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a + b} \overrightarrow{AB}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{BG} = \frac{a}{a + b} \overrightarrow{BA}}$$

donc le point G appartient nécessairement à la droite (AB).

2) Barycentre de trois points

a) *Définition*

Soient A, B et C trois points du plan et a, b et c trois réels vérifiant $a + b + c \neq 0$, alors il existe un unique point G du plan qui vérifie :

$$\boxed{a \overrightarrow{GA} + b \overrightarrow{GB} + c \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}}$$

Ce point G est appelé le barycentre de $\{(A ; a) ; (B ; b) ; (C ; c)\}$.

b) *Propriétés*

- On ne change pas le barycentre, si on multiplie les coefficients de chaque point par un même nombre non nul.
- Si G est le barycentre de $\{(A ; a) ; (B ; b) ; (C ; c)\}$ avec $a + b + c \neq 0$, alors pour tout point M du plan on a :

$$\boxed{a \overrightarrow{MA} + b \overrightarrow{MB} + c \overrightarrow{MC} = (a + b + c) \overrightarrow{MG}}$$

c) *Théorème d'associativité*

Soient A, B et C trois points du plan et a, b et c trois réels vérifiant $a + b + c \neq 0$.

Si $a + b \neq 0$, le barycentre G du système $\{(A ; a) ; (B ; b) ; (C ; c)\}$, est aussi le barycentre du système $\{(H ; a + b) ; (C ; c)\}$, où H est le barycentre du système $\{(A ; a) ; (B ; b)\}$.