

## Chapitre 3 Dérivation

### 1) Nombre dérivé

#### a) Définition

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  contenant le réel  $a$  ; Le nombre dérivé de  $f$  en  $a$  est, s'il existe, le nombre :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

dans ce cas on dit que  $f$  est dérivable en  $a \in I$ .

#### b) interprétation géométrique

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et  $C_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé, alors  $f'(a)$ , si il existe, est le coefficient de la tangente à  $C_f$  au point  $A(a; f(a))$

#### c) Equation générale d'une tangente

Avec les hypothèses précédentes la tangente au point  $A(a; f(a))$  de  $C_f$  possède pour équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

### 2) Fonctions dérivées

#### a) Définitions.

Dire que  $f$  est dérivable sur  $I$  c'est dire que  $f$  est dérivable en tout réel  $x \in I$ .

Dans ce cas la fonction qui à tout réel  $x$  associe le réel  $f'(x)$  est appelée fonction dérivée de  $f$ , notée  $f'$ .

#### b) Dérivées des fonctions usuelles.

Domaine de définition de $f$	$f$ est définie par	Domaine de définition de $f'$	$f'$ est définie par
$\mathbb{R}$	$f(x) = c$ ( $c$ constante)	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$\mathbb{R}$	$f(x) = ax + b$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$
$\mathbb{R}$	$f(x) = x^n$ où $n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$\mathbb{R}^*$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$\mathbb{R}^*$	$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$
$]0; +\infty[$	$f(x) = \sqrt{x}$	$]0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

### 3) Dérivation et opérations sur les fonctions

On considère deux fonctions  $u$  et  $v$  définies et dérivables sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , et pour l'inverse et le quotient, on suppose de plus que pour tout  $x \in I$   $v(x) \neq 0$ . On a alors les relations suivantes :

La fonction somme $u + v$ est dérivable sur $I$	$(u + v)'(x) = u'(x) + v'(x)$
La fonction produit $uv$ est dérivable sur $I$	$(uv)'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$
La fonction inverse de $v$ est dérivable sur $I$	$(\frac{1}{v})'(x) = \frac{-v'(x)}{[v(x)]^2}$
La fonction quotient $\frac{u}{v}$ est dérivable sur $I$	$(\frac{u}{v})'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{[v(x)]^2}$

### 4) Dérivation et fonctions composées

Soit une fonction affine qui à  $x$  associe  $ax + b$  et  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Soit  $J$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , tel que si  $x \in J$ , alors  $(ax + b) \in I$ .

Alors la fonction  $g$  définie sur  $J$  par  $g(x) = f(ax + b)$  est dérivable sur  $J$  et pour tout  $x \in J$  on a la relation :

$$g'(x) = af'(ax + b)$$