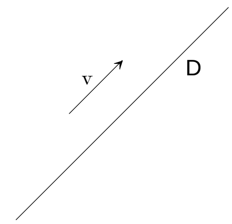
Chapitre 7: Equations de droites et systèmes

I) Equations de droites

<u>Définition 1</u>

On appelle **vecteur directeur** d'une droite D, tout vecteur $\overrightarrow{v}$ non nul de même direction que cette droite.



<u>Remarque</u>

Soit D' la droite passant par les points A et B. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite D'.

<u>Définition 2</u>

Soit une droite D dans le plan muni d'un repère (O ; $\overrightarrow{i}$; $\overrightarrow{j}$).
Une équation (E) de la droite D est une relation vérifiée par les coordonnées x et y de tous les points de D et uniquement par les coordonnées de ces points.

<u>Remarque</u>

La fonction affine f : $x \longmapsto \frac{3}{2}x + 1$ est représentée par la droite D d'équation : $y = \frac{3}{2}x + 1$.
Cette équation équivaut à : $2y = 3x + 2$
ou bien à : $2y - 3x - 2 = 0$
ou encore à : $3x - 2y + 2 = 0$

Toutes ces équations sont équivalentes et sont des équations de la droite D, mais $y = \frac{3}{2}x + 1$ en est **l'équation réduite**.

<u>Théorème 1</u> Dans le plan muni d'un repère (O ; $\overrightarrow{i}$; $\overrightarrow{j}$),

• toute droite D **non parallèle à l'axe des ordonnées** a une équation de la forme :

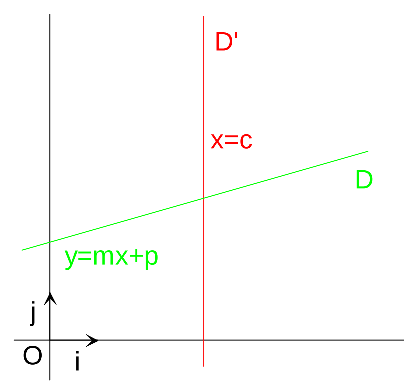
$$\mathbf{y = mx + p}$$

où m et p sont deux nombres réels.
m est appelé **le coefficient directeur** de la droite et b est appelé **l'ordonnée à l'origine**.

• toute droite D' **parallèle à l'axe des ordonnées** a une équation de la forme :

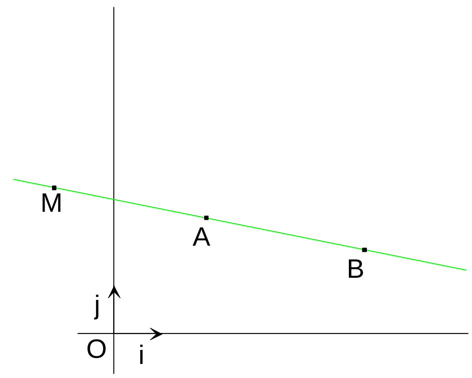
$$\mathbf{x = c}$$

où c est un nombre réel.
c est l'abscisse commune de tous les points de la droite.



Démonstration du théorème 1

Considérons la droite D passant par les points distincts A (x_A ; y_A) et B (x_B ; y_B) dans le repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).



Soit M (x ; y) un point quelconque du plan.

Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont pour coordonnées respectives ($x - x_A$; $y - y_A$) et ($x_B - x_A$; $y_B - y_A$).

M appartient à D signifie que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, ce qui se traduit par :

$$(x - x_A)(y_B - y_A) = (y - y_A)(x_B - x_A) \qquad (E)$$

• **1^{er} cas** : D n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.
On a donc : $x_B \neq x_A$. L'équation (E) est alors équivalente à :

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A).$$

Posons $\boxed{m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$. Alors (E) équivaut à $y = mx - mx_A + y_A$, soit $y = mx + p$ avec $p = -mx_A + y_A$.

Conclusion : $y = mx + p$.

• **2^{ème} cas** : D est parallèle à l'axe des ordonnées.
On a donc : $x_B = x_A$. L'équation (E) est alors équivalente à : $(x - x_A)(y_B - y_A) = 0$ ou encore à $x - x_A = 0$ car $y_B \neq y_A$ puisque les points A et B sont distincts.
On obtient donc une équation du type $x = c$ avec $c = x_A$.

Conclusion : x=c.

Théorème 2

Dans le plan muni d'un repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$), le vecteur $\vec{v}$ **(1 ; m)** est **un vecteur directeur** de la droite D d'équation $y = mx + p$.

Réciproquement, si le vecteur $\vec{u}$ **(1 ; m)**, avec $m \neq 0$, est **un vecteur directeur** d'une droite D, alors **m est le coefficient directeur** de D.