Nombres et calculs

II) Les nombres premiers

Dans tout ce paragraphe, les nombres considérés sont des entiers naturels. Nous nous plaçons dans le cadre de l'Arithmétique.

1) Diviseurs d'un entier

Soient a et b deux entiers naturels. On dit que b est un diviseur de a (ou que a est un multiple de b) s'il existe un entier naturel k tel que a=kb.

Exemples

.1,6,7 sont des diviseurs de 84 puisque :
84=1x84, 84=6x14=7x12.
.Tout entier a admet des diviseurs, parmi lesquels 1 et a.

2) Nombres premiers

Définition On dit qu'un entier naturel p est premier s'il possède exactement deux diviseurs : 1 et lui -même.

Exemples

.2,3 et 7 sont des nombres premiers.
.6 n'est pas premier car il a 4 diviseurs : 1,2,3 et 6.
.0 n'est pas premier car il a une infinité de diviseurs.
.1 n'est pas premier car il ne possède qu'un seul diviseur : lui-même.

3) Décomposition d'un entier en produit de nombres premiers

THEOREME (admis)

Tout entier naturel plus grand que 2 peut s'écrire comme un produit de nombres premiers dont certains peuvent être égaux. Cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.

Exemple

Décomposition de 72 en produit de nombres premiers.

Méthode 1 Avec les tables de multiplication.
On sait que 72=9x8. On a 9=3x3=3^2 et 8=4x2=2^3. Donc 72=3^2x2^3.
Par convention, on range les facteurs premiers par ordre croissant : 72= 2^3x3^2.

Méthode 2 Avec des divisions successives par les nombres premiers 2,3,5,7.
On écrit 72 et on tire un trait vertical à droite.
.72 est divisible par 2 ; le quotient est 36. On dispose 2 et 36 comme ci-contre.
.36 est divisible par 2 ; le quotient est 18.
.18 est divisible par 2 ; le quotient est 9.
.9 est divisible par 3 ; le quotient est 3.
.3 est divisible par 3 ; le quotient est 1.
Par conséquent, 72=2x2x2x3x3= 2^3x3^2.
Peu importe la façon dont on organise les calculs, la décomposition en produit de nombres premiers est unique.

4) Applications

Recherche du PGCD de deux entiers

Le PGCD de deux entiers a et b est le produit de tous les facteurs premiers communs aux décompositions de a et b.

Exemple

Déterminer le PGCD de 84 et 630.
On décompose ces nombres : 84=2x2x3x7 et 630=2x3x3x5x7 donc :

PGCD (84,630)=2x3x7=42

Simplification des fractions

On aura retenu en collège qu'une fraction se met sous forme irréductible en simplifiant le numérateur et le dénominateur par leur PGCD. Ce qui montre tout le bénéfice à tirer des décompositions en facteurs premiers.

Ainsi : $\frac{84}{630} = \frac{2*2*3*7}{2*3*3*5*7} = \frac{2}{3*5} = \frac{2}{15}$.