

Démonstration

Si $a \geq 1$		Si $0 < a \leq 1$
alors $a^2 \geq a$	($\times a > 0$)	alors $a^2 \leq a$
alors $a^3 \geq a^2$	($\times a > 0$)	alors $a^3 \leq a^2$
Donc $a^3 \geq a^2 \geq a$		Donc $a^3 \leq a^2 \leq a$

I) Intervalles de $\mathbb{R}$

1) Définition et exemples

Définition 1 Soient deux nombres réels a et b tels que $a < b$.

L'intervalle noté ...	... est l'ensemble des nombres réels x tels que ...	Il est représenté par :
$[a; b]$	$a \leq x \leq b$	
$]a; b[$	$a < x < b$	
$[a; b[$	$a \leq x < b$	
$]a; b]$	$a < x \leq b$	
$[a; +\infty[$	$x \geq a$	
$]a; +\infty[$	$x > a$	
$] - \infty; b]$	$x \leq b$	
$] - \infty; b[$	$x < b$	

$[a; b]$ est un intervalle fermé ; les crochets sont "fermés" c'est-à-dire tournés vers l'intérieur.

$]a; b[$ est un intervalle ouvert ; les crochets sont "ouverts" c'est-à-dire tournés vers l'extérieur.

a et b sont appelés les bornes de l'intervalle.

Exemples

.Si $-2 \leq x < 3$, alors $x \in [-2; 3[$.

.Si $-1 < x$, alors $x \in] - 1; +\infty[$.

.Si $x \in]0; 2]$, alors $0 < x \leq 2$.

.Si $x \in] - \infty; -5]$, alors $x \leq -5$.

2) Intersection et réunion de deux intervalles

L'**intersection** de deux intervalles est l'ensemble des réels appartenant **à la fois** aux deux intervalles.

La **réunion** de deux intervalles est l'ensemble des réels appartenant à l'un **ou** à l'autre de ces intervalles.

Exemples

$$.[2; 5] \cap [4; 6] = [4; 5] \quad ; \quad [2; 5] \cup [4; 6] = [2; 6].$$

$$.] - \infty; 2] \cap [-1; +\infty[= [-1; 2] \quad ; \quad] - \infty; 2] \cup [-1; +\infty[= \mathbb{R}.$$

II) Valeurs exactes, approchées, arrondies

Définition 2 Soit r un nombre réel strictement positif.

.Lorsque $a \leq x \leq a + r$, le nombre réel a est une valeur approchée par défaut de x à r près.

.Lorsque $a - r \leq x \leq a$, le nombre réel a est une valeur approchée par excès de x à r près.

.Lorsque $a - r \leq x \leq a + r$, le nombre réel a est une valeur approchée de x à r près.

Exemples

Valeur exacte	$\frac{2000}{7}$	$\frac{\pi}{60}$	$\cos(80^0)$	$\frac{3\sqrt{7}-9}{2}$
Troncature à 3 décimales	285,714	0,052	0,173	-0,531
Valeur approchée à 10^{-3} près				
.par défaut	285,714	0,052	0,173	-0,532
.par excès	285,715	0,053	0,174	-0,531
Valeur arrondie				
.à 10^{-3} près	285,714	0,052	0,174	-0,531
.à 4 chiffres significatifs	285,7	0,05236	0,1736	-0,5314

III) Valeurs absolues

1) Valeur absolue et distance

A) Distance entre deux réels

Définition 3 La **distance** entre deux réels x et y est la différence entre le plus grand et le plus petit. Cette distance est notée $|x-y|$ ou encore $|y-x|$.

$|x-y|$ se lit "valeur absolue de x moins y ".

Exemples

$|3-5|$ est la distance entre les réels 3 et 5. Cette distance est égale à $5-3=2$.

Notons A le point d'abscisse 3 et B le point d'abscisse 5 sur une droite graduée. La distance entre les réels 3 et 5 est la distance entre les points A et B, c'est-à-dire AB.

$|-2-3|$ est la distance entre les réels -2 et 3.

Cette distance est égale à $3-(-2)=5$.

Interprétation graphique de $|x-y|$

Sur une droite graduée d'origine O, notons M le point d'abscisse x et N le point d'abscisse y .

$|x-y|$ est la distance entre les points M et N, c'est-à-dire MN.

B) Valeur absolue d'un réel

$|x|$ est la distance entre x et 0.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{lorsque } x \geq 0 \\ -x & \text{lorsque } x \leq 0 \end{cases}$$

Exemples

$|5|=5$ car 5 est positif.

$|-3|=3$ car -3 est négatif.

Si x est un réel, $|x^2|=x^2$ car $x^2 \geq 0$.

C) Quelques propriétés

Théorème 1

1. Dire que $|x|=0$ équivaut à dire que $x=0$.

2. $|-x|=|x|$.

3. Dire que $|x|=|y|$ équivaut à dire que $x=y$ ou $x=-y$.

2) Intervalles et valeur absolue

Théorème 2 a est un réel, r est un réel positif.

Dire que $|x-a| \leq r$ équivaut à dire que x appartient à l'intervalle $[a-r; a+r]$.

Démonstration

$|x-a| \leq r$ signifie que la distance de x à a est inférieure ou égale à r , c'est-à-dire que x appartient à l'ensemble représenté en rouge sur la figure ci-contre.