Devoir surveillé n°2

Exercice 1

1) Donner la propriété fondamentale du barycentre de trois points et démontrer cette propriété.
2) Soit G l'isobarycentre de trois point A, B et C. Ecrire le point A comme barycentre des points B,C et G

Exercice 2

Soit ABC un triangle, I est le milieu du segment[AB], J et K sont les points définis par les égalités vectorielles :

$$\overrightarrow{CJ} = \frac{2}{5}\,\overrightarrow{CB} \text{ et } \overrightarrow{AK} = 3\,\overrightarrow{AC}.$$

1) Faire une figure.
2) Ecrire le point A comme barycentre des points B et I.
3) Ecrire le point C comme barycentre des points J et B.
4) Ecrire le point K comme barycentre des points A et C.
5) Démontrer que les points I, J et K sont alignés.

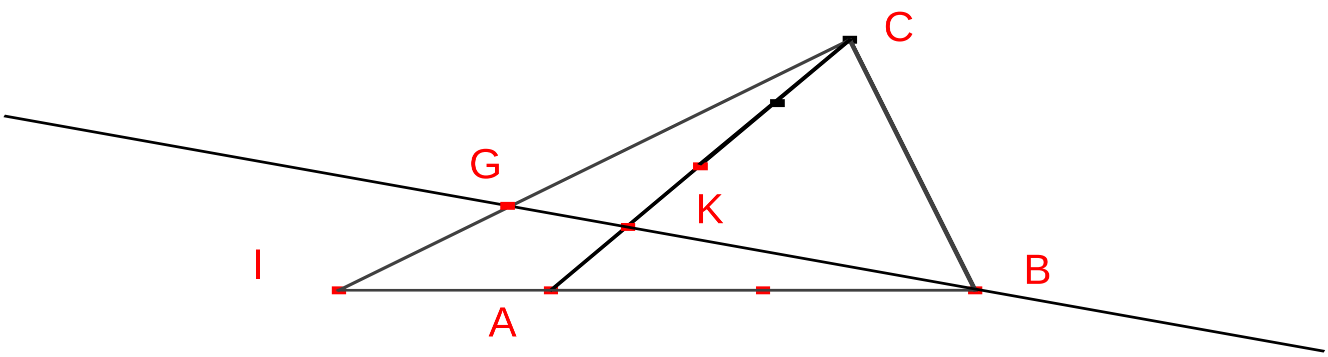
Exercice 3

Soit ABC un triangle dont les côtés mesurent AB = 5cm, AC = 7cm et BC = 8cm.

1) Déterminer et représenter graphiquement l'ensemble E_1 des points M du plan tels que :
$$\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\| = \|3\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MC}\|$$
2) Déterminer et représenter graphiquement l'ensemble E_2 des points M du plan tels que :
$$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 2AB$$

(bien définir tous les points utilisés)

Exercice 4



1) En utilisant les graduations régulières sur les segments [IB] et [AC], écrire le point G comme barycentre des points A, B et C
2) Donner la position du point G sur le segment [IC].
3) Démontrer que les droites (AG) et (BC) sont parallèles.

Exercice 5

Peut-on trouver un triangle rectangle dont la diagonale mesure 17cm et dont l'aire est de 120 cm² ?

On cherche un nombre entier de deux chiffres N qui vérifie :

- La somme de ses chiffres est égale à 12.
- Si on inverse l'ordre de ses deux chiffres, on obtient un nouveau nombre M qui vérifie M×N = 4275

(bien réfléchir à l'écriture d'un nombre entier de deux chiffres)

correction

Exercice1

1) $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a + b + c)\overrightarrow{MG}$ où G le barycentre de {(A;a) ; (B;b) ; (C;c)} avec $a+b+c \neq 0$
2) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow -3\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$ d'où G le barycentre de {(A;1) ; (B;1) ; (C;1)} ⇔ A le barycentre de {(G; – 3) ; (B;1) ; (C;1)}.

Exercice2

1) I milieu de [AB] alors $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow -2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$. donc A =bary {(I; – 2) ; (B;1)}
2) $5\overrightarrow{CJ} = 2\overrightarrow{CB}$ donc $5\overrightarrow{CJ} - 2\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{0}$ d'où C = barycentre{ (J ;5) ; (B ; – 2)}.
3) $\overrightarrow{AK} - 3\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AK} - 3\overrightarrow{AK} - 3\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{KA} - 3\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{0}$ donc K = barycentre {(A;2) ; (C; –3) }
4) A =barycentre {(I; – 2) ; (B;1)} donc A =barycentre {(I; 4) ; (B; –2)} en multipliant par –2.
C = barycentre{ (J ;5) ; (B ; – 2)}donc C = barycentre{ (J ; –5) ; (B ; 2)} en multipliant par –1.
On constate que 4 – 2 =2 donc comme K = barycentre {(A;2) ; (C; –3) } et A =barycentre {(I; 4) ; (B; –2)}, et en utilisant le théorème d'associativité du barycentre on obtient que K = le barycentre de {(I;4) ; (B; –2) ; (C; –3)}.
De même –5 + 2 = –3, donc comme K = le barycentre de {(I;4) ; (B; –2) ; (C; –3)} et C = barycentre{ (J ; –5) ; (B ; 2)}, et en utilisant le théorème d'associativité du barycentre on obtient que :
K = le barycentre de {(I;4) ; (B; –2) ; (J ; –5) ; (B ; 2)}.
Or 2 – 2 = 0 donc K = le barycentre de {(I;4) ; (J ; –5)}, donc les points I,J et K sont alignés et $\overrightarrow{IK} = 5\overrightarrow{IJ}$.

Exercice3

1) On pose G le barycentre de {(A;1) ; (B;2) ; (C;3)} et I l'isobarycentre des points A et C.

D'après la propriété fondamentale on obtient que $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = 6\overrightarrow{MG}$ et que $3\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MC} = 6\overrightarrow{MI}$ d'où :
M appartient à l'ensemble E_1 ssi $\| \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} \| = \| 3\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MC} \|$.
M appartient à l'ensemble E_1 ssi $\| 6\overrightarrow{MG} \| = \| 6\overrightarrow{MI} \|$
M appartient à l'ensemble E_1 ssi 6MG = 6MI
M appartient à l'ensemble E_1 ssi MG =MI
Donc l'ensemble E_1 est l'ensemble des points équidistants de G et de I, c'est donc la médiatrice du segment [GI]

<u>Construction</u> I est le milieu du segment [AC]

Soit L le barycentre de {(A;1) ; (B;2) } L existe car $1 + 2 \neq 0$ et $\overrightarrow{AL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

D'après le théorème d'associativité G ={(L ;3) ; (C;3)} et donc G est le milieu du segment [CL].

2) On pose K le barycentre de {(A;1) ; (B;1) ; (C;2)}

D'après la propriété fondamentale on obtient que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MK}$ d'où :
M appartient à l'ensemble E_2 ssi $\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \| = 2AB$
M appartient à l'ensemble E_2 ssi $\| 4\overrightarrow{MK} \| = 2$ AB
M appartient à l'ensemble E_2 ssi 4MK = 2AB
M appartient à l'ensemble E_2 ssi $MK = \frac{1}{2}AB = 2.5$
Donc l'ensemble E_2 est l'ensemble des points M qui se situent à la distance 2,5 de K, c'est donc le cercle de centre K et de rayon 2,5 cm.

<u>Construction</u> Soit T le milieu de [AB] d'après le théorème d'associativité on obtient que K est le barycentre de { (T ;2) ; (C ;2)}, donc K est le milieu de [TC].

Exercice 4

1) D'après les graduations on a $\overrightarrow{IB} = 3\overrightarrow{IA}$ donc I est le barycentre de {(A;3) ; (B; –1)} et $\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AK}$ donc K est le barycentre de {(A;3) ; (C;1) }. On pose H le barycentre de {(A;3) ; (B; – 1) ; (C;1)}.

D'après le théorème d'associativité et I est le barycentre de {(A;3) ; (B; –1)} H le barycentre de {(A;3) ; (B; – 1) ; (C;1)}, on obtient que H est le barycentre de {(I;2) ; (C;1) } donc le point H appartient à la droite (IC).
D'après le théorème d'associativité et K est le barycentre de {(A;3) ; (C;1) } H le barycentre de {(A;3) ; (B; – 1) ; (C;1)}, on obtient que H est le barycentre de {(K;4) ; (B; – 1) } donc le point H appartient à la droite (KB).
Le point H est donc le point d'intersection des droites (CI) et (KB), il est donc confondu avec le point G.
Donc G est le barycentre de {(A;3) ; (B; –1) ; (C;1)}.

2)