Devoir surveillé n°8

Exercice 1

On considère l'ensemble Γ des points de l'espace dont les coordonnées ($x\,;y\,;z$) vérifient l'équation :

$$(E)\ 2x + y - z - 3 = 0$$

1) Démontrer que les points A(1 ;2 ;1) , B (0 ;2 ;-1) et C(1 ;0 ;-1) appartiennent à Γ.
2) Montrer que les points A, B et C déterminent un plan unique, que l'on note **P**.(on admettra que Γ et **P** sont confondus et que l'équation (E) est une équation de **P**).
3) On considère les points N(1 ;1 ;2), M(-1 ;3 ;0) et L(0 ;3 ;0).
   a) La droite (NM) coupe-t-elle le plan **P** ?
   b) La droite (NL) coupe-t-elle le plan **P** ?
   c) Déterminer par une phrase l'intersection du plan **P** et du plan (MNL).

Exercice 2

Soit ABCDEFGH un cube d'arête 6cm.

1) Représenter ce cube en perspective cavalière posé sur la face ABCD avec les points A et B devant.
2) Placer les points R, S et I définis par : $\vec{AR} = \frac{1}{3}\vec{AB}$, $\vec{BS} = \frac{1}{3}\vec{BC}$ et I est le milieu du segment [FG].
3) Démontrer que les points R, I, E et S sont coplanaires.
4) En déduire la section du cube par plan (RSI). (à tracer sur le cube en vert)

Exercice 3

Déterminer les trois premiers termes et la raison r, positive, d'une suite arithmétique vérifiant les deux relations :

$$\boxed{U_0 + U_1 + U_2 = 21} \text{ et } \boxed{U_0 \times U_1 \times U_2 = -105}$$

Exercice 4

Calculer les deux sommes suivantes, on pourra éventuellement définir des suites pour faciliter le calcul !!

1) $S = \frac{3}{11} + \frac{5}{11} + \frac{7}{11} + \ldots.. + \frac{49}{11} + \frac{51}{11}$
2) $S' = 8 - 4 + 2 - 1 + \ldots\ldots. - \frac{1}{64} + \frac{1}{128}$

Exercice 5

Une suite géométrique est strictement croissante et tous ses termes sont strictement négatifs.

1) Justifier que la raison q de cette suite vérifie la double inégalité $0 < q < 1$.
2) On suppose que $\boxed{U_1 \times U_3 = \frac{4}{9}}$ et que $\boxed{U_1 + U_2 + U_3 = -\frac{19}{9}}$, calculer U_1 , U_2 , U_3 et q.

Exercice 6

Soit la suite (U_n) définie par $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \dfrac{4U_n - 2}{U_n + 1} \end{cases}$

1) Calculer U_1 , U_2 et U_3 .
2) La suite (U_n) est-elle arithmétique, géométrique ?
3) On admet que pour tout entier n, $U_n > 1$, et on définit la suite (V_n) par $\boxed{V_n = \frac{U_n - 2}{U_n - 1}}$
   a) Calculer V_0, V_1 et V_2 .
   b) Démontrer que $V_{n+1} = \frac{2}{3} V_n$, que peut-on en déduire pour la suite (V_n) ?
   c) Exprimer V_n en fonction de n, quelle est le sens de variation de (V_n) ?
   d) Déterminer le rang n à partir duquel $V_n < 10^{-3}$.