Exercice 1 (5 points)**Commun à tous les candidats***La figure demandée sera construite sur la copie.*On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = a & \text{avec } a \in \mathbb{R} \text{ et } 0 < a < 1 \\ u_{n+1} = u_n(2 - u_n) & \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(2 - x)$.
 - a) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
 - b) Justifier que, pour tout $x \in]0 ; 1[$, $f(x) \in]0 ; 1[$.
2. On suppose dans cette question que $a = \frac{1}{8}$.
 - a) Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2 .
 - b) Dans un repère orthonormal (unité graphique : 8 cm), tracer sur l'intervalle $[0 ; 2]$ la droite D d'équation $y = x$ et la courbe (P) représentative de la fonction f .
 - c) Utiliser D et (P) pour construire sur l'axe des abscisses les points A_1, A_2, A_3 d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3 .
3. On considère à présent un réel a quelconque tel que $0 < a < 1$.
 - a) Montrer par récurrence que pour tout entier n , $0 < u_n < 1$.
 - b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
 - c) Que peut on en déduire ?
4. On suppose à nouveau dans cette question que $a = \frac{1}{8}$ et on considère la suite numérique (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = 1 - u_n$.
 - a) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n .
 - b) En déduire que, pour tout entier n , $v_n = (v_0)^{2^n}$.
 - c) Déterminer la limite de la suite (v_n) puis celle de la suite (u_n) .

Exercice 2 (5 points)**Commun à tous les candidats**

Pour chaque question, le candidat doit mentionner l'affirmation ou les affirmations exactes et doit justifier sa réponse. Les calculs doivent être détaillés.

Question 1Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x e^{1/x}$, (C) sa courbe représentative dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ et f' sa dérivée.

- A. Pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) e^{1/x}$.
- B. L'équation $f(x) = 3$ admet 2 solutions sur $]0 ; +\infty[$.
- C. L'axe des ordonnées est asymptote verticale à (C).
- D. La droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

Question 2

- A. Si x est solution de l'équation $\ln(x^2 + x - 2) = \ln(x + 2) + \ln(x - 1)$, alors x appartient nécessairement à l'intervalle $]1 ; +\infty[$.
- B. L'ensemble S des solutions réelles de l'équation $e^x - e^{-x} = 2$ est : $S = \{\ln(1 + \sqrt{2})\}$.
- C. L'inéquation $2\ln(1 - x) - \ln(x + 5) \leq 0$ a pour ensemble de solutions : $S = [-1 ; 4]$.
- D. e^{-3} et $\sqrt{e}$ sont les seules solutions réelles de l'équation : $[\ln(x)]^2 + \frac{5}{2} \ln(x) - \frac{3}{2} = 0$.

Exercice 3 (5 points)**Commun à tous les candidats**

La courbe demandée sera construite sur la feuille de papier millimétré.

On considère la transformation de l'iodure de tertiobutyle en hydroxyde de tertiobutyle et iodure d'hydrogène. On note $c(t)$ la concentration molaire, exprimée en mol.L^{-1} , en hydroxyde de tertiobutyle obtenue dans la réaction à l'instant t exprimé en secondes. On émet l'hypothèse que la vitesse de formation $\frac{dc(t)}{dt}$ notée $c'(t)$, d'hydroxyde de tertiobutyle en fonction du temps vérifie la relation :

$$(E) \quad c'(t) = -0,33 c(t) + 0,03432.$$

Partie A

On note c une fonction vérifiant (E). La méthode d'Euler permet de construire une suite de points (M_n) proches de la courbe représentative de la fonction c . On choisit le pas $h = 1$. On admet que les coordonnées $(x_n ; y_n)$ des points M_n obtenus en appliquant cette méthode avec ce pas vérifient :

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n + 1 \\ y_{n+1} = 0,67 y_n + 0,03432. \end{cases}$$

Calculer les coordonnées des points M_1, M_2, M_3, M_4 . (on arrondira au millième près les valeurs trouvées).

Partie B

1. a) Donner la solution générale de l'équation (E) sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
b) Préciser la solution particulière de (E) vérifiant $c(0) = 0$.

2. On note c une fonction qui vérifie (E).

On note C la courbe représentative de c dans un repère orthogonal (unité graphique : 1 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées pour 0,1 unité).

- a) Vérifier que la fonction c définie par $c(t) = 0,104(1 - e^{-0,33t})$ est solution de (E) et vérifie la condition $c(0) = 0$.

On considère désormais dans toute la suite de l'exercice cette fonction c .

- b) Déterminer la limite de c en $+\infty$. Préciser l'asymptote D à la courbe C .
c) Déterminer le sens de variations de c sur $[0 ; +\infty[$ puis dresser son tableau de variations.
d) Représenter D et C .
e) Placer dans le même repère que précédemment les points M_1, M_2, M_3, M_4 .
3. Déterminer, par le calcul, le temps (arrondi à la seconde près) à partir duquel on peut prévoir que la concentration molaire sera supérieure ou égale à 0,10192.

Exercice 4 (5 points)**Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité Mathématiques**

La figure demandée sera construite sur la copie.

Dans le plan complexe P rapporté au repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, (unité graphique 2 cm), on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = -1$ et $z_B = 3i$.

Soit la fonction f de P privé du point A dans P qui, à tout point M d'affixe z associe

le point M' d'affixe : $z' = i \left(\frac{z - 3i}{z + 1} \right)$ (1).

1. Soit C le point d'affixe $z_C = 2 - i$, déterminer l'affixe du point D tel que $f(D) = C$.

2. Déterminer la nature du triangle ABC.

3. A l'aide de l'égalité (1), montrer que, pour tout point M distinct de A et de B,

$$\frac{OM'}{AM} = \frac{BM}{AM} \quad \text{et} \quad (\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) + 2\pi k \quad \text{avec } k \in \mathbf{Z}.$$

4. En déduire et construire les ensembles suivants :

a) L'ensemble (E) des points M tels que l'image M' soit située sur le cercle (Γ) de centre O et de rayon 1.

b) L'ensemble (F) des points M tels que l'affixe de M' soit réelle.

5. On considère la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On note C_1 l'image de C par r .

a) Déterminer l'affixe de C_1 .

b) Montrer que C_1 appartient à l'ensemble (F).