Tles S **2006/2007**

Devoir n° 3 (DS 1)

Exercice 1 (10 points)

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormal (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) (unités : 4 cm).
On note A, B, C les points d'affixes respectives 2 i, –1 et i.
On considère l'application f de P – {A} dans P qui à tout point M de P – {A} d'affixe z associe le point M ' d'affixe $z' = \dfrac{z+1}{z-2\,\mathrm{i}}$.

1. **a)** Faire une figure que l'on complètera au cours de l'exercice.
b) Déterminer l'affixe du point C' image de C par f. Quelle est la nature du quadrilatère ACBC' ?
c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\dfrac{z+1}{z-2\,\mathrm{i}} = \mathrm{i}$. En déduire l'affixe du point C'' antécédent de C par f.
Quelle est la nature du triangle BCC'' ?

2. Déterminer et construire l'ensemble E_1 des points M de P – {A} dont les images par f appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1.

3. On pose $z = x + \mathrm{i}\,y$. Montrer que la partie réelle x' et la partie imaginaire y' de z' vérifient :

$$x' = \frac{x^2 + y^2 + x - 2\,y}{x^2 + (y-2)^2} \quad \text{et} \quad y' = \frac{2\,x - y + 2}{x^2 + (y-2)^2}$$

4. **a)** Déterminer et construire l'ensemble E_2 des points M de P – {A} dont les images par f ont pour affixe un nombre réel.
b) Déterminer et construire l'ensemble E_3 des points M de P – {A} dont les images par f ont pour affixe un nombre imaginaire pur ou 0.

Exercice 2 (10 points)

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) (unité graphique 2 cm), on considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = 2\ ,\ \ z_B = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} \ \text{ et } \ z_C = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}.$$

Partie A

1. Placer les points A, B et C et déterminer la nature du quadrilatère OBAC.

2. Déterminer et construire l'ensemble D des points M du plan d'affixe z et tels que $|z| = |z-2|$.

Partie B

A tout point M d'affixe $z \neq z_A$ on associe le point M ' d'affixe $z' = \dfrac{-4}{z-2}$.

1. **a)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z = \dfrac{-4}{z-2}$.
b) En déduire les points associés à B et C.
c) Déterminer et placer le point G' associé au centre de gravité G du triangle OAB.

2. **a) Question de cours**
Prérequis : *le module d'un nombre complexe z quelconque, noté $|z|$ vérifie $|z|^2 = z\,\bar{z}$.*
Démontrer que :
Pour tous nombres complexes z_1 et z_2, $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$;
Pour tout nombre complexe non nul z, $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$.
b) Démontrer que, pour tout nombre complexe $z \neq 2$, $|z' - 2| = \dfrac{2|z|}{|z-2|}$.
c) On suppose dans cette question que M est un point quelconque de D où D est l'ensemble défini à la question **2** de la **partie A**.
Démontrer que le point M ' associé à M appartient à un cercle (γ) dont on précisera le centre et le rayon. Tracer (γ).