Tles S **2006/2007**

Devoir n° 8 (DS 3)

Exercice 1 (10 points)

Partie A : restitution organisée des connaissances.

Prérequis : *on rappelle les deux résultats suivants :*

(i) *si z est un nombre complexe non nul, on a l'équivalence suivante :*

$$\begin{cases} |z| = r \\ \arg z = \theta \text{ à } 2\pi \text{ près} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \\ r > 0 \end{cases}$$

(ii) *Pour tous nombres réels a et b :*

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \end{cases}$$

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls.
Démontrer les relations :
$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$ et $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ à 2π près.

Partie B

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse donnée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre-exemple. Une réponse sans démonstration ne rapporte pas de point.
On rappelle que si z est un nombre complexe, $\overline{z}$ désigne le conjugué de z et $|z|$ le module de z.

1. Si $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ I, alors z^4 est un nombre réel.
2. Si $z + \overline{z} = 0$, alors $z = 0$.
3. Si $z + \frac{1}{z} = 0$, alors $z = \mathrm{i}$ ou $z = -\mathrm{i}$.
4. Si $|z| = 1$ et si $|z + z'| = 1$, alors $z' = 0$.

Partie C

On considère dans le plan orienté muni du repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u};\vec{v})$ trois points A et B d'affixes respectives z_A, z_B et z_c vérifiant AB = 5 et $\frac{z_c - z_A}{z_B - z_A} = \sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}$.

1. Que peut-on en déduire pour les distances AB et AC et pour l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$?
2. Construire C en laissant apparaître les traits de construction. On prendra, pour cette question, $z_A = -4$ et $z_B = 1$ et comme unité graphique 1 cm.

Exercice 2 (10 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u};\vec{v})$. Unité graphique 2 cm.

1. On rappelle que, pour tous nombres complexes a et b :

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$$

Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^3 = 8$.

2. On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c définies par :

$$a = 2,\quad b = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3} \quad\text{et}\quad c = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}.$$

On appelle r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r' la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

On pose B' = r'(B) et C' = r(C) et on note b' et c' les affixes respectives de B' et C'.

a) Placer les points A, B et C dans le repère $(O\,;\vec{u};\vec{v})$.
Dans la suite de l'exercice on complétera cette figure.
b) Montrer que $b' = 2 + \sqrt{3} + 3\,\mathrm{i}$.
c) Montrer que b' et c' sont des nombres conjugués.

3. On appelle M, N, P et Q les milieux respectifs des segments [CB], [BB'], [B'C'] et [CC']. On note m, n, p et q leurs affixes.

a) Montrer que l'affixe n du point N est égale à $\frac{1+\sqrt{3}}{2}(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})$.

En déduire que les points O, N et C sont alignés.
b) Montrer que $n + 1 = \mathrm{i}(q + 1)$. Que peut-on en déduire pour le triangle MNQ ?
c) Montrer que le quadrilatère MNPQ est un carré.