Tles S **2006/2007**

Devoir n° 10 (DS 4)

Exercice 1 (10 points)

Une exploitation agricole utilise un certain type d'engrais qu'elle répand sur le sol.
Une étude a montré qu'une fois cet engrais répandu sur le sol, une partie en est transmise sous forme de nitrates dans l'eau de la nappe phréatique ; ces nitrates y sont ensuite dissous.

A tout instant t, $f(t)$ désigne la quantité de nitrates dissous dans l'eau et l'étude a aussi montré que la fonction f qui est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ est solution de l'équation différentielle :

$$y' + 0{,}4\, y = 21\, e^{-0.7\,t} \quad \textbf{(1)}$$

1. **a)** Résoudre l'équation différentielle : $y' + 0{,}4\, y = 0$ **(2)**

b) Déterminer le réel k tel que la fonction g, définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(t) = k\, e^{-0{,}7\,t}$ soit une solution particulière de **(1)**.

c) Montrer que f est solution de **(1)** si et seulement si $f - g$ est solution de **(2)**.

d) En déduire que la solution de l'équation différentielle **(1)** vérifiant $f(0) = 0$ est la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(t) = 70\,(e^{-0{,}4\,t} - e^{-0{,}7\,t})$.

2. **a)** Calculer la limite de f en $+\infty$.

b) Montrer que $f'(t) = 70\, e^{-0{,}4\,t}\,(-0{,}4 + 0{,}7\, e^{-0{,}3\,t})$.

c) Démontrer que l'équation $-0{,}4 + 0{,}7\, e^{-0{,}3\,t} = 0$ admet une solution unique t_1 dans $[0\,;+\infty[$.

(on ne cherchera pas à résoudre cette équation mais on étudiera la fonction φ définie sur $[0\,;+\infty[$ par $\varphi(t) = -0{,}4 + 0{,}7\, e^{-0{,}3\,t}$).

Vérifier que $1{,}8 < t_1 < 1{,}9$.

d) En déduire le signe de $f'(t)$, puis le sens de variation de f sur $\mathbb{R}_+$ et construire le tableau de variations de f.

e) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O;\ \vec{i};\ \vec{j})$ du plan (unité graphique : 1 cm).

f) Donner une approximation à 10^{-1} près de la quantité maximale de nitrates dissous dans l'eau et de la valeur de t à partir de laquelle la quantité de nitrates dissous dans l'eau repassera en dessous de 2.

Exercice 2 (10 points)

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1$.

1. **a)** Démontrer par récurrence que, pour tout $n \geq 3$, $u_n \geq 0$.

b) En appliquant le résultat précédent à l'entier naturel $n - 1$, en déduire que

pour tout $n \geq 4$, $u_n \geq n - 2$.

c) En déduire la limite de la suite (u_n).

2. On définit la suite (v_n) par $v_n = 4\,u_n - 8\,n + 24$ pour tout entier naturel n.

a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique, dont on donnera la raison et le premier terme. Montrer ensuite que (v_n) est décroissante.

b) Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\,n - 6$.

c) Vérifier que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = x_n + y_n$ où (x_n) est une suite géométrique et (y_n) une suite arithmétique dont on précisera pour chacune le premier terme et la raison.

d) En déduire l'expression de $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n.