

Devoir n° 20 (DS8)

Exercice 1 (9 points)**Partie A**

k étant un réel donné, on note f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = (x + k) e^{-x}$.

On note C_k la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

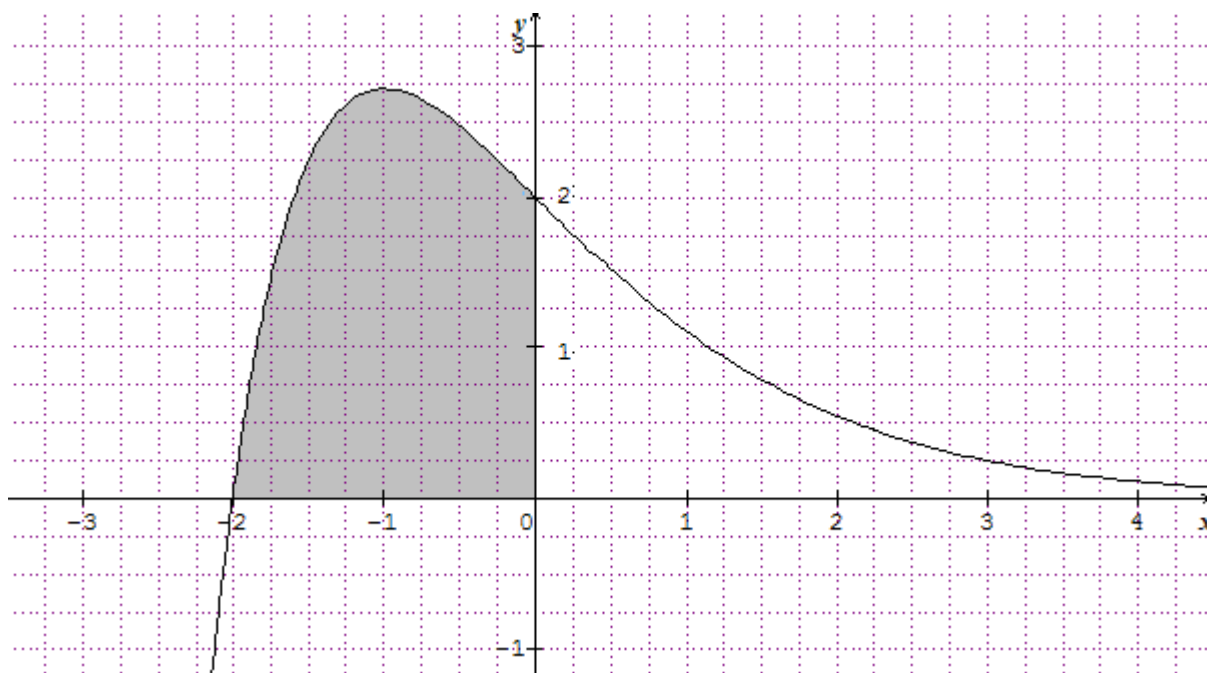
1. Déterminer les limites de f_k en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Calculer $f_k'(x)$ pour tout réel x .
3. En déduire le tableau de variation de f_k .

Partie B

1. On considère la suite d'intégrales (I_n) définie par $I_0 = \int_{-2}^0 e^{-x} dx$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$\text{par } I_n = \int_{-2}^0 x^n e^{-x} dx$$

- a) Calculer la valeur exacte de I_0 .
 - b) En utilisant une intégration par parties, démontrer l'égalité : $I_{n+1} = (-2)^{n+1} e^2 + (n+1)I_n$.
 - c) En déduire les valeurs exactes de I_1 et I_2 .
2. Le graphique ci-dessous représente une courbe C_k qui est la représentation graphique d'une fonction f_k définie à la partie A.



- a) A l'aide des renseignements donnés par le graphique, déterminer la valeur du nombre réel k correspondant.
- b) Soit S l'aire de la partie coloriée (en unités d'aire) ; exprimer S en fonction de I_1 et I_0 et en déduire sa valeur exacte.

Exercice 2 (11 points)

On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, (unité graphique : 5 cm)

Partie A : étude de la fonction f .

1. Vérifier que pour tout nombre réel x , $f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$
2. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
3. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x . En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.
4. Dresser le tableau des variations de f .
5. Tracer $\mathcal{C}_f$ et ses asymptotes éventuelles dans le repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

Partie B : quelques propriétés graphiques.

1. On considère les points M et M' de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives x et $-x$. Déterminer les coordonnées du milieu A du segment [MM']. Que représente le point A pour la courbe $\mathcal{C}_f$?
2. Soit n un entier naturel. On désigne par D_n le domaine du plan limité par la droite d'équation $y = 1$, la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$. A_n désigne l'aire du domaine D_n exprimée en cm^2 .
 - a) Calculer A_n .
 - b) Etudier la limite éventuelle de A_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie C : calcul d'un volume.

Soit λ un réel positif.

On note $V(\lambda)$ l'intégrale $\int_{-\lambda}^0 \pi [f(x)]^2 dx$.

On admet que $V(\lambda)$ est une mesure, exprimée en unités de volume, du volume engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses, de la portion de la courbe $\mathcal{C}_f$ obtenue pour $-\lambda \leq x \leq 0$.

1. Déterminer les nombres réels a et b tels que, pour tout nombre réel x , $\frac{e^{2x}}{(1 + e^x)^2} = \frac{ae^x}{1 + e^x} + \frac{be^x}{(1 + e^x)^2}$
2. Exprimer $V(\lambda)$ en fonction de λ .
3. Déterminer la limite de $V(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.