Tles S **2006/2007**

Devoir n° 23 (DS 10)

Exercice 1 **(4 points)**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = 1 - x^2\,\mathrm{e}^{1-x^2}$.
Son tableau de variation est le suivant :

x	0		1		$+\infty$
f	1	↘	0	↗	1

Sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ et son asymptote Δ d'équation $y = 1$ sont tracées en fin de sujet.

Partie A – lecture graphique

1. k est un réel donné. En utilisant la représentation graphique donnée en fin de sujet, préciser en fonction de k le nombre de solutions dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$ de l'équation $f(x) = k$.

2. n étant un entier naturel non nul, déterminer les valeurs de n pour lesquelles l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ admet deux solutions distinctes.

Partie B – définition et étude de deux suites

1. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ admet deux solutions u_n et v_n respectivement comprises dans les intervalles $[0\,;1]$ et $[1\,;+\infty[$.

2. Sur le graphique, construire sur l'axe des abscisses les réels u_n et v_n pour n appartenant à $\{2\,;3\,;4\}$.

3. Déterminer le sens de variation des suites (u_n) et (v_n).

4. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
Procéder de même pour la suite (v_n).
En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 2 **(5 points)**

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,;\vec{v})$; i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

Soient les points A, B et C d'affixes respectives i ; $1 + \mathrm{i}$ et $-1 + \mathrm{i}$.
Soit f l'application qui, à tout point M du plan différent de A, d'affixe z, associe le point M' du plan d'affixe z' tel que $z' = \dfrac{\mathrm{i}z + 2}{z - \mathrm{i}}$.

1. a) Déterminer les images de B et C par l'application f.

b) Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de i, on a la relation : $(z' - \mathrm{i})(z - \mathrm{i}) = 1$.

c) Soit D le point d'affixe $1 + 2\mathrm{i}$. Placer les points A, B, C et D sur une figure (unité graphique 4 cm)
Déduire de la question précédente une construction du point D', image de D par l'application f.

2. Soit R un nombre réel strictement positif.
Quelle est l'image par l'application f du cercle de centre A et de rayon R ?

3. a) Montrer que, si l'affixe du point M est un imaginaire pur différent de i, alors l'affixe du point M' est un imaginaire pur. Que signifie ce résultat pour l'image par l'application f de l'axe des imaginaires privé du point A ?

b) Soit Δ la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$. Déterminer l'image de cette droite privée du point A par l'application f.

Exercice 3 **(5 points)**

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte.
Le candidat indiquera le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte un point ; une réponse fausse enlève 0,5 points ; l'absence de réponse est comptée 0 points.
Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

Première partie

Pour réaliser des étiquettes de publipostage, une entreprise utilise deux banques de données :
B_1, contenant 6 000 adresses dont 120 sont erronées et 5 880 exactes,
B_2, contenant 4 000 adresses dont 200 sont erronées et 3 800 exactes.

1. On prélève au hasard, avec remise, 10 étiquettes parmi les 6 000 réalisées à l'aide de B_1.

La probabilité qu'exactement trois de ces étiquettes comportent une adresse erronée est :

a) $\dfrac{\binom{120}{3}+\binom{5\,880}{7}}{\binom{6\,000}{10}}$ **b)** $\dfrac{3}{120}$ **c)** $\binom{10}{3}\times\left(\dfrac{120}{6\,000}\right)^3\times\left(\dfrac{5\,880}{6\,000}\right)^7$ **d)** $\binom{10}{3}\times\left(\dfrac{3}{120}\right)^3\times\left(\dfrac{7}{5\,880}\right)^7$

2. Parmi les 10 000 étiquettes, on en choisit une au hasard. Sachant que l'étiquette comporte une adresse exacte, la probabilité qu'elle ait été réalisée à l'aide de B_1 est :

a) 0,98 **b)** $\dfrac{0,4\times 0,95}{0,6\times 0,98\times + 0,6\times 0,02}$ **c)** $0,6\times 0,98$ **d)** $\dfrac{0,6\times 0,98}{0,6\times 0,98+0,4\times 0,95}$

Deuxième partie

La durée de vie, exprimée en heures, d'un robot jusqu'à ce que survienne la première panne est modélisée par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ (loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,000\,5$). Ainsi, la probabilité que le robot tombe en panne avant l'instant t est $p([0\,;t[) = \int_0^t \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.

3. La probabilité qu'un robot ait une durée de vie supérieure à 2 500 heures est :

a) $\mathrm{e}^{-\frac{2\,500}{2\,000}}$ **b)** $\mathrm{e}^{\frac{5}{4}}$ **c)** $1-\mathrm{e}^{-\frac{2\,500}{2\,000}}$ **d)** $\mathrm{e}^{-\frac{2\,000}{2\,500}}$

4. La durée de vie moyenne d'un robot est donnée par la formule : $\mathrm{E} = \lim\limits_{t\to+\infty}\int_0^t \lambda\,x\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.

L'intégrale $\int_0^t \lambda\,x\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$ est égale à :

a) $\lambda\dfrac{t^2}{2}\mathrm{e}^{-\lambda t}$ **b)** $-t\,\mathrm{e}^{-\lambda t}-\dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{\lambda}+\dfrac{1}{\lambda}$ **c)** $\lambda\,t\,\mathrm{e}^{-\lambda t}-\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}-\lambda$ **d)** $t\,\mathrm{e}^{-\lambda t}-\dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{\lambda}$

5. La durée de vie moyenne des robots, exprimée en heures, est :

a) 3 500 **b)** 2 000 **c)** 2 531,24 **d)** 3 000

Exercice 4 **(6 points)**

On désigne par f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et par f' sa fonction dérivée.
Ces fonctions vérifient les propriétés suivantes :

(1) pour tout nombre réel x, $(f'(x))^2 - (f(x))^2 = 1$,
(2) $f'(0) = 1$,
(3) la fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. a) Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) \neq 0$.
b) Calculer $f(0)$.

2. En dérivant chaque membre de l'égalité de la proposition (1), démontrer que :
(4) pour tout nombre réel x, $f''(x) = f(x)$, où f'' désigne la fonction dérivée seconde de la fonction f.

3. On pose $u = f' + f$ et $v = f' - f$.
a) Calculer $u(0)$ et $v(0)$.
b) Démontrer que $u' = u$ et $v' = -v$.
c) En déduire les fonctions u et v.
d) En déduire que, pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

4. a) Etudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$.
b) Etudier les variations de la fonction f et en dresser le tableau.

5. a) Soit m un nombre réel. Démontrer que l'équation $f(x) = m$ a une solution unique α dans $\mathbb{R}$.
b) Déterminer cette solution lorsque $m = 3$ (on en donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près).

Annexe de l'exercice 1 à compléter et à coller sur la copie

✂ ....